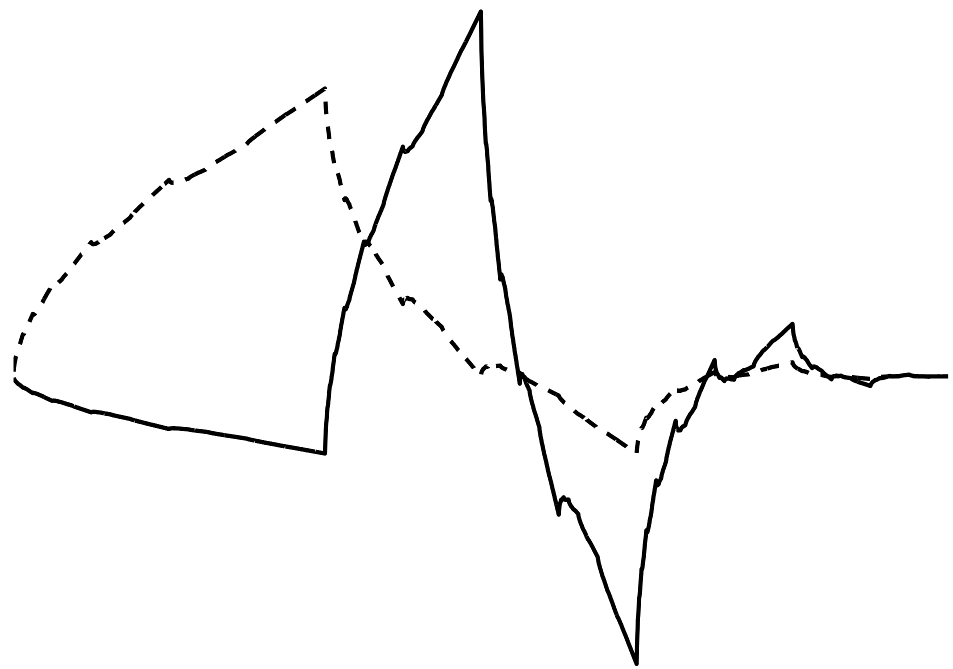
TALASIĆI (WAVELETS)

1. Transformacija
2. Multirezolucija
3. Konstrukcija
4. Filtar
5. **Osobine**
6. Piramidalni algoritam
7. Primeri i primene



2007

- Egzistencija funkcije skaliranja – da li dilataciona jednačina ima rešenje čija je energija konačna (rešenje u $\mathcal{L}_2$)?
- Kako konstruisati funkciju skaliranja – da li kaskadni algoritam konvergira ka ovom rešenju?
- Kakva je glatkost rešenja, ako ono postoji?
- Koliko prvih momenata talasića je jednako nuli?
- Kakva je tačnosti aproksimacije?
  Tačnost deo po deo polinomijalne aproksimacije splajnovima ili konačnim elementima zavisi od toga do kog stepena polinomi $1, t, \ldots, t^{r-1}$ mogu biti reprodukovani tačno pomoću aproksimacionih funkcija. Kada ovi polinomi pripadaju prostoru aproksimacionih funkcija, greška aproksimacije je reda $(\Delta t)^r$,

$$\|f(t) - f_{-j}(t)\| \approx C(\Delta t)^r \|f^{(r)}(t)\|$$

Kod nas su aproksimacione funkcije $\varphi_{jn}(t)$ i $\psi_{jn}(t)$

Njihove osobine (interval na kome nisu identički jednaki nuli, glatkost, ortogonalnost, iščezavajući momenti) određuju koeficijenti dilatacione jednačine

$$\varphi(t) = 2\sum_{k=0}^{N-1} h(k)\,\varphi(2t-k), \qquad \psi(t) = 2\sum_{k=0}^{N-1} (-1)^n h(N-1-n)\,\varphi(2t-k)$$

Koeficijenti dilatacione jednačine $=$ koeficijenti nisko-frekvencijskog filtra

Osnovni operatori u teoriji talasića,

$$M = (\downarrow 2)\,2F, \qquad T = (\downarrow 2)\,2F\,F^\top \qquad F = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ h(0) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ h(1) & h(0) & 0 & 0 & 0 \\ h(2) & h(1) & h(0) & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

F – matrica filtra $\mathbf{h}$

$F\,F^\top$ – Toeplitz-ova matrica gustine energijskog spektra filtra $\widehat{p}(\omega)$

Vrste su dvostruko pomerene operacijom kompresije $(\downarrow 2)$.

♠ *U frekvencijskom domenu delovanje operatora M i T je sledeće*

$$(\widehat{M}f)(\omega) = \widehat{h}(\frac{\omega}{2})\,\widehat{f}(\frac{\omega}{2}) + \widehat{h}(\frac{\omega}{2}+\pi)\,\widehat{f}(\frac{\omega}{2}+\pi)$$

$$(\widehat{T}f)(\omega) = |\widehat{h}(\frac{\omega}{2})|^2\,\widehat{f}(\frac{\omega}{2}) + |\widehat{h}(\frac{\omega}{2}+\pi)|^2\,\widehat{f}(\frac{\omega}{2}+\pi)$$

Dokaz:

$$Mf = 2\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ h(0) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ h(2) & h(1) & h(0) & 0 & 0 \\ h(4) & h(3) & h(2) & h(1) & h(0) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cdot \\ f(0) \\ f(1) \\ f(2) \\ \cdot \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdot \\ 2\sum_n h(n)f(-n) \\ 2\sum_n h(n)f(2-n) \\ 2\sum_n h(n)f(4-n) \\ \cdot \end{pmatrix}$$

Fourier-ova transformacija (reprezentacija u frekvencijskom domenu) je

$$(\widehat{M}f)(\omega) = \sum_m \left(2\sum_n h(n)f(2m-n)\right) e^{-\imath m\omega}$$

Desna strana je

$$\widehat{h}\left(\frac{\omega}{2}\right) \widehat{f}\left(\frac{\omega}{2}\right) + \widehat{h}\left(\frac{\omega}{2}+\pi\right) \widehat{f}\left(\frac{\omega}{2}+\pi\right)$$

$$= \sum_n h(n)e^{-\imath n\omega/2} \sum_j f(j)e^{-\imath j\omega/2} + \sum_n h(n)e^{-\imath n(\pi+\omega/2)} \sum_j f(j)e^{-\imath j(\pi+\omega/2)}$$

$$= \sum_{n,j} h(n)f(j)e^{-\imath(n+j)\omega/2} + \sum_{n,j} h(n)f(j)(-1)^{n+j}e^{-\imath(n+j)\omega/2}$$

$$= \sum_l \left(1+(-1)^l\right) \left(\sum_n h(n)f(l-n)\right) e^{-\imath l\omega/2}$$

$$= \sum_m \left(2\sum_n h(n)f(2m-n)\right) e^{-\imath m\omega}$$

gde je stavljeno $l = n + j$, i, kako u poslednjoj sumi ostaju samo sabirci po parnim l, stavljeno je $l = 2m$.

Analogno se dokazuje tvrđenje za matricu T.

Od osobina matrica M i T zavise odgovori na postavljena pitanja.
Iteriranje niskofrekvencijskog filtra se predstavlja stepenovanjem matrice, pa konvergencija zavisi od sopstvenih vrednosti. Od matrice M zavisi uniformna, a od matrice T srednjekvadratna konvergencija.

Vektorski zapis dilatacione jednačine

$$\mathbf{\Phi}(t) = \big(\varphi(t), \varphi(t+1), \ldots, \varphi(t+N-1)\big)^\top$$

$$\varphi(t) = 2\sum_{n=0}^{N-1} h(n)\varphi(2t-n) \qquad \longrightarrow \qquad \mathbf{\Phi}(t) = M\,\mathbf{\Phi}(2t)$$

$\mathbf{\Phi}(0)$ je nenula vektor ako je $\lambda = 1$ sopstvena vrednost matrice M.

$$\varphi'(t) = 4\sum_{n=0}^{N-1} h(n)\varphi'(2t-n) \qquad \longrightarrow \qquad \mathbf{\Phi}'(t) = 2M\,\mathbf{\Phi}'(2t),$$

$\mathbf{\Phi}'(0)$ je nenula vektor ako je $\lambda = 1/2$ sopstvena vrednost matrice M.

Daljim diferenciranjem (ako je moguće) dobija se

$$\mathbf{\Phi}^{(m)}(t) = 2^m M \, \mathbf{\Phi}^{(m)}(2t)$$

$\mathbf{\Phi}^{(m)}(0) = \big(\varphi^m(0), \ldots, \varphi^m(N-1)\big)^\top$ je sopstveni vektor matrice M ako je $\lambda = 1/2^m$ sopstvena vrednost matrice M.

Iz *uslova* A_r, kojima su definisani maksimalno ravni filtri, sledi ova i druge poželjne osobine talasića.

---

1. *Matrica* $M = \{2h(2i-j)\}$ *ima sopstvene vrednosti* $1,\ 1/2, \ldots, (1/2)^{r-1}$
2. *Polinomi* $1,\ t, \ldots, t^{r-1}$ *su linearne kombinacije translacija* $\varphi(t-k)$
3. *Prvih* r *momenata talasića* $\psi(t)$ *se anuliraju*

$$\int t^m \psi(t)\, dt = 0, \qquad m = 0, 1, \ldots, r-1$$

4. Glatke funkcije mogu biti aproksimirane sa greškom $O((\Delta t)^r)$ kombinacijama funkcija φ za svako j

$$\|f - \sum_n a_{-j,n} \varphi(2^j t - n)\| \leq C 2^{-jr} \|f^{(r)}\|$$

gde je $a_{-j,n} = \int f(t) 2^{j/2} \varphi(2^j t - n)\, dt$ *i* $\Delta t = 2^{-j}$

5. Fourier-ovi koeficijenti glatke funkcije određeni bazisom talasića (koeficijenti talasića) opadaju kao

$$\left| \int f(t)\, \psi(2^j t)\, dt \right| \leq C 2^{-jr}$$

6. Kaskadni algoritam konvergira u $\mathcal{L}_2$ ka $\varphi(t)$ ako ostale sopstvene vrednosti matrice T zadovoljavaju uslov $|\lambda| < 1$.

7. $\varphi(t)$ i $\psi(t)$ imaju s izvoda u $\mathcal{L}_2$ ako ostale sopstvene vrednosti matrice T zadovoljavaju uslov $|\lambda| < 4^{-s}$ ($s \leq s_{max}$ nije veće od broja r).

♠ 1 *Matrica M ima sopstvene vrednosti* $\lambda = 1,\ 1/2, \ldots, (1/2)^{r-1}$,

$$M\,\mathbf{\Phi}^{(m)} = \left(\frac{1}{2}\right)^m \mathbf{\Phi}^{(m)}, \qquad m = 0,\ 1, \ldots, r-1,$$

ako i samo ako koeficijenti filtra zadovoljavaju uslov A_r,

koji se u vremenskom domenu svodi na r *sumacionih pravila za koeficijente*

$$\sum_{n=0}^{2r-1} (-1)^n n^m h(n) = 0, \quad m = 0, \ldots, r-1,$$

ili, u frekvencijskom domenu glasi

Frekvencijski odziv $\widehat{h}(\omega)$ *ima nulu reda* r *za* $\omega = \pi$, $\widehat{h}^{(m)}(\pi) = 0$, *tj.*

$$\widehat{h}(\omega) = \left(\frac{1 + e^{-\imath\omega}}{2}\right)^r \widehat{q}(\omega), \qquad H(z) = \left(\frac{1 + z^{-1}}{2}\right)^r Q(z)$$

Tvrđenje je posledica teoreme koja sledi.

♠ *Filteru $H(z)$ pridružimo matricu M_s sa sopstvenim vrednostima λ_s i sopstvenim vektorima $\mathbf{x}_s$. Kada $H(z)$ pomnožimo sa $\frac{1+z^{-1}}{2}$, dobijamo filtar kome odgovara matrica M_n, dimenzije za jedan veće od dimenzije matrice M_s, i*

a) Sopstvene vrednosti nove matrice su $\lambda_n = \frac{1}{2}\lambda_s$. Dodatna sopstvena vrednost je $\lambda_n = 1$.

b) Sopstveni vektori $\mathbf{x}_n$ imaju koordinate koje su razlike koordinata sopstvenih vektora $\mathbf{x}_s$,

$$x_n(k) = x_s(k) - x_s(k-1), \qquad \text{tj.} \qquad X_n(z) = (1 - z^{-1})\, X_s(z)$$

c) Vektor $\mathrm{e}_0 = (1\,1\,\cdots\,1)$ je levi sopstveni vektor matrice M_n, koji odgovara dodatnoj sopstvenoj vrednosti $\lambda_n = 1$,

$$\mathrm{e}_0\, M_n = \mathrm{e}_0$$

d) Desni sopstveni vektor ima komponente koje su vrednosti funkcije skaliranja u celobrojnim tačkama $\varphi(k)$,

$$M_n\, \mathbf{\Phi}(0) = \mathbf{\Phi}(0)$$

Dokaz: U z-domenu jednačina koja definiše sopstvene vrednosti je

$$(\widehat{M}\mathbf{x})(\omega) = \widehat{h}\Big(\frac{\omega}{2}\Big)\,\widehat{x}\Big(\frac{\omega}{2}\Big) + \widehat{h}\Big(\frac{\omega}{2}+\pi\Big)\,\widehat{x}\Big(\frac{\omega}{2}+\pi\Big) = \lambda\widehat{x}(\omega)$$

Smena

$$e^{-\imath\frac{\omega}{2}} = z, \quad \longrightarrow \quad e^{-\imath(\pi+\frac{\omega}{2})} = -z, \qquad \widehat{x}\Big(\frac{\omega}{2}\Big) = X(z)$$

daje zapis relacije sopstvenih vrednosti matrice filtra $\mathbf{h}$ u z-domenu

$$(*) \qquad M_S\mathbf{x}_S = \lambda_S\mathbf{x}_S \quad \Longleftrightarrow \quad H(z)X_s(z) + H(-z)X_s(-z) = \lambda_s\, X_s(z^2)$$

Množenjem jednačine sa $\quad \frac{1}{2}\,(1-z^{-2}) = \frac{1}{2}\,(1+z^{-1})\,(1-z^{-1}) \quad$ dobijamo

$$\frac{1+z^{-1}}{2}\,H(z)\,(1-z^{-1})X_s(z) + \frac{1-z^{-1}}{2}\,H(-z)\,(1+z^{-1})X_s(-z)$$
$$= \frac{1}{2}\,\lambda_s\,(1-z^{-2})X_s(z^2)$$

Novom filtru $\frac{1+z^{-1}}{2}H(z)$ odgovara matrica M_n. Ako označimo sa

$$X_n(z) = (1 - z^{-1})X_s(z), \qquad \lambda_n = \frac{1}{2}\lambda_s$$

poslednja jednačina, prema $(*)$, predstavlja u z-domenu zapisanu jednačinu sopstvenih vrednosti matrice M_n novog filtra, $\quad M_n\mathbf{x}_n = \lambda_n\mathbf{x}_n$.

a) Sopstvene vrednosti matrice M_n su $\lambda_n = \frac{1}{2}\lambda_s$

b) Sopstveni vektori zadovoljavaju tvrđenje teoreme, jer je

$$\widehat{x}_n\left(\frac{\omega}{2}\right) = X_n(z) = (1 - z^{-1})\,X_s(z) = (1 - e^{\imath\frac{\omega}{2}})\,\widehat{x}_s\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

$$= \left(1 - e^{\imath\frac{\omega}{2}}\right)\sum_{k=0}^{N-1} x_s(k)e^{-\imath k\frac{\omega}{2}} = \sum_{k=0}^{N-1} x_s(k)e^{-\imath k\frac{\omega}{2}} - \sum_{k=0}^{N-1} x_s(k)e^{-\imath(k-1)\frac{\omega}{2}}$$

$$= \sum_{k=-1}^{N-1}(x_s(k) - x_s(k+1))e^{-\imath k\frac{\omega}{2}} = e^{\imath(\frac{\omega}{2}+\pi)}\sum_{k=0}^{N}(x_s(k) - x_s(k-1))e^{-\imath k\frac{\omega}{2}}$$

$$x_s(-1) = x_s(N) \overset{\text{def}}{=} 0$$

c) Vektor $\mathbf{e}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ je levi sopstveni vektor matrice M koji odgovara sopstvenoj vrednosti $\lambda = 1$,

$$\mathbf{e}_0 \, M = \mathbf{e}_0$$

jer iz prvog sumacionog pravila (za $m = 0$) za koeficijente filtra

$$\sum_k h(2k) = \sum_k h(2k+1) = 1/2$$

sledi da je

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2h(0) & & & \\ 2h(2) & 2h(1) & 2h(0) & \\ & 2h(3) & 2h(2) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

d) Sledi na osnovu vektorskog zapisa dilatacione jednačine.

♠ 2 *Levi sopstveni vektor definisan jednačinom* $\mathbf{y}_m M = \left(\frac{1}{2}\right)^m \mathbf{y}_m$ *određuje linearnu kombinaciju funkcija skaliranja* $\varphi(t+k)$ *koja je jednaka* t^m*,*

$$\sum_k y_m(k)\varphi(t+k) = t^m, \qquad m = 0,\, 1, \ldots, r-1.$$

Stoga prostor $\mathcal{V}_0$*, generisan funkcijama* $\{\varphi(t+k)\}$*, sadrži sve polinome stepena manjeg od* r*.*

Dokaz: Ako je vektor $\mathbf{\Phi}(t)$ rešenje dilatacione jednačine $\mathbf{\Phi}(t) = M\mathbf{\Phi}(2t)$, sledi

$$G(t) = \mathbf{y}_m\mathbf{\Phi}(t) = \mathbf{y}_m M\mathbf{\Phi}(2t) = \left(\frac{1}{2}\right)^m \mathbf{y}_m\mathbf{\Phi}(2t) = \left(\frac{1}{2}\right)^m G(2t)$$

$G(2t) = 2^m G(t)$ samo ako je $G(t) = \sum y_m(k)\varphi(t+k) = c\, t^m$

Parametar r je bar jednak jedan, pa za levi sopstveni vektor $\mathbf{y}_0 \equiv \mathbf{e}_0 = (1, \ldots, 1)$, dobijamo važnu osobinu funkcije skaliranja

$$\sum \varphi(t+k) = 1$$

Osobina 2. je bitna za tačnost aproksimacije talasićima.

Polinomi 1 i t mogu se predstaviti linearnom kombinacijom translacija

◇ krov funkcije, $\quad M_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \lambda_0 = 1, \quad \lambda_1 = \frac{1}{2} \quad \longrightarrow \quad r = 2$

◇ Daubechies funkcije skaliranja $\varphi(t) = Db_2(t)$. Matrica

$$M_3 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1+\sqrt{3} & 0 & 0 \\ 3-\sqrt{3} & 3+\sqrt{3} & 1+\sqrt{3} \\ 0 & 1-\sqrt{3} & 3-\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

ima sopstvene vrednosti i leve sopstvene vektore

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= 1 & \mathbf{y}_0 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ \lambda_1 &= \frac{1}{2} & \mathbf{y}_1 &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3-\sqrt{3} & 1-\sqrt{3} & -1-\sqrt{3} \end{pmatrix} \\ \lambda_2 &= \frac{1+\sqrt{3}}{4} & \mathbf{y}_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Samo dve sopstvene vrednosti su stepeni broja $2 \longrightarrow r = 2$

$\lambda_0 = 1$ odgovara konstantni, $\sum y_0(k)\varphi(t+k) = 1$

$\lambda_1 = \frac{1}{2}$ odgovara linearnom sopstvenom vektoru $(k, k-1, k-2)$, $\sum y_1(k)\varphi(t+k) = c\,t$ (c je konstanta)

Zaključak je da Daubechies prostor $\mathcal{V}_0$ sadrži funkcije 1 i t.

Daubechies talasići iz prostora $\mathcal{W}_0$ su ortogonalni na funkcije skaliranja,

$$\int 1\,\psi(t)\,dt = \sum \int \varphi(t+k)\,\psi(t)\,dt = 0,$$
$$\int t\,\psi(t)\,dt = \sum y_1(k) \int \varphi(t+k)\,\psi(t)\,dt = 0$$

Sledi da Daubechies talasić ima dva iščezavajuća momenta.

♠ 3 *Prvih r momenata talasića $\psi(t)$ iščezavaju,*

$$\int t^m \psi(t)\,dt = 0, \qquad m = 0, 1, \ldots, r-1$$

I opšti zaključak sledi iz osobine 2. i ortogonalnosti talasića i funkcije skaliranja

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} t^m \psi(t)\,dt &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_k y_m(k)\varphi(t+k)\psi(t)\,dt \\ &= \sum_k y_m(k) \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t+k)\psi(t)\,dt = 0, \qquad m = 0,\dots,r-1\end{aligned}$$

Ova osobina talasića ima za posledicu da se polinomijalna (do stepena $r-1$) funkcija $P_m(t)$ predstavlja samo aproksimacijom (tj. funkcijom skaliranja). Detalji su nula, jer su koeficijenti $b_{jk} = \int P_m(t)\psi(t)\,dt = 0$.

Primedba:
Polinomi $1,\dots,t^{r-1} \notin \mathcal{L}_2$, jer imaju beskonačnu energiju $\int_{-\infty}^{\infty} (t^j)^2\,dt = \infty$. Stoga ne pripadaju prostoru $\mathcal{V}_0$, ali se mogu tačno predstaviti kombinacijom funkcija $\varphi(t+k)$ na svakom konačnom intervalu. Vektori $\mathbf{y}_m$ imaju beskonačno mnogo nenula komponenti koje množe sve translacije funkcije $\varphi(t)$, tako da kombinacija ostaje polinom za svako t.

♠ 4 *Kada* $\widehat{h}(\omega)$ *ima nulu reda* r*, svaka funkcija* $f(t)$*, koja je* r *puta diferencijabilna, aproksimirana je sa greškom reda* $(\Delta t)^r = 2^{jr}$ *svojom projekcijom* $f_j(t)$ na $\mathcal{V}_j$,

$$\|f(t) - f_j(t)\| \leq C(\Delta t)^r \|f^{(r)}\| \quad \text{tj.}$$

$$\|f(t) - \sum_k a_{j,k} 2^{-j/2} \varphi(2^{-j}t - k)\| \leq C 2^{jr} \|f^{(r)}\|$$

Prvih r sabiraka Taylorovog razvoja (polinom stepena $r - 1$) može se lokalno predstaviti bazisom $\{\varphi(t - k)\}$. Grešku određuje prvi član Taylorovog razvoja koga ne možemo rekonstruisati, što daje $(\Delta t)^r f^{(r)}$.

Pitanje je koliko r treba zahtevati u praksi. Obično je dovoljno da funkcija $\varphi(t)$ bude dva puta diferencijabilna, a to je za $r \approx 4$.

Za četvrtku i Haar-ove talasiće je $r = 1$.

Ako je funkcija $f(t)$ male glatkosti samo u nekom delu oblasti, može se tu lokalno povećati tačnost povećanjem broj nivoa rezolucije $|j|$ – tzv. adaptivna mreža.
To je multigrid tehnika u konačnim razlikama i osnovna ideja konačnih elemenata.

Jedna od prednosti aproksimacije talasićima nad Fourierovom metodom je upravo ova mogućnost lokalnog popravljanja tačnosti aproksimacije.

♠5 *Ako $f(t)$ ima r izvoda, njeni koeficijenti talasića opadaju kao 2^{jr},*

$$|b_{jk}| = \left| \int f(x) 2^{-j/2} \psi(2^{-j}x - k)\, dx \right| \leq C 2^{jr} \|f^{(r)}\|$$

$\boxed{\text{Višestrukost nule frekvencijskog odziva u tački } \pi \text{ je suština teorije talasića}}$

Frekvencijski odziv $\widehat{h}(\omega)$ ima nulu reda r ako ima činilac $(1 + e^{-\imath\omega})^r$ (*uslov* A_r)

Kaskadni algoritam je iterativni proces definisan matricom filtra $M = (\downarrow 2)2F$

$$\varphi^{(i+1)}(t) = 2\sum_{k=0}^{N-1} h(k)\varphi^{(i)}(2t-k), \qquad \varphi^{(0)}(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0,1) \\ 0, & t \notin [0,1) \end{cases}$$

Dve vremenske skale t i $2t$ predstavljaju kontinualnu formu kompresije $(\downarrow 2)$ – umesto $(\downarrow 2)\varphi(n) = \varphi(2n)$ imamo $(\downarrow 2)\varphi(t) = \varphi(2t)$.

U svakoj iteraciji imamo dva koraka - filtriranje i reskaliranje.

$\diamond$ 1 Filtar $h(0) = 2/3, \quad h(1) = 1/3$

filtriranje $$\frac{2}{3}\varphi^{(0)}(t) + \frac{1}{3}\varphi^{(0)}(t-1)$$

reskaliranje $$\varphi^{(1)}(t) = \frac{4}{3}\varphi^{(0)}(2t) + \frac{2}{3}\varphi^{(0)}(2t-1)$$

Da bi površina ostala nepromenjena $(= 1)$, množimo visinu sa 2 (koefic. $2h(k)$).

Filtriranjem i reskaliranjem jedne četvrtke (po formuli određenoj dilatacionom jednačinom) dobijaju se dve četvrtke polovine početne širine, i visine $4/3$ i $2/3$.

Sada filtriramo i reskaliramo $\varphi^{(1)}(t)$. Od dve polu-četvrtke nastaju četiri četvrt-četvrtke, određene izrazom

$$\varphi^{(2)}(t) = \frac{4}{3}\varphi^{(1)}(2t) + \frac{2}{3}\varphi^{(1)}(2t-1)$$

Prva četvrt-četvrtka ima visinu $\frac{16}{9}$, jer se visina množi sa $\frac{4}{3}$ u svakoj iteraciji.

Očigledno je da je

$$\varphi^{(i)}(0) = \left(\frac{4}{3}\right)^{i} \to \infty, \qquad i \to \infty$$

što znači da pri ovom izboru koeficijenata dilatacione jednačine iterativni algoritam ne konvergira.

Frekvencijski odziv filtra u ovom primeru je

$$\widehat{h}(\omega) = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}e^{-\imath\omega}, \qquad H(z) = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}z^{-1}$$

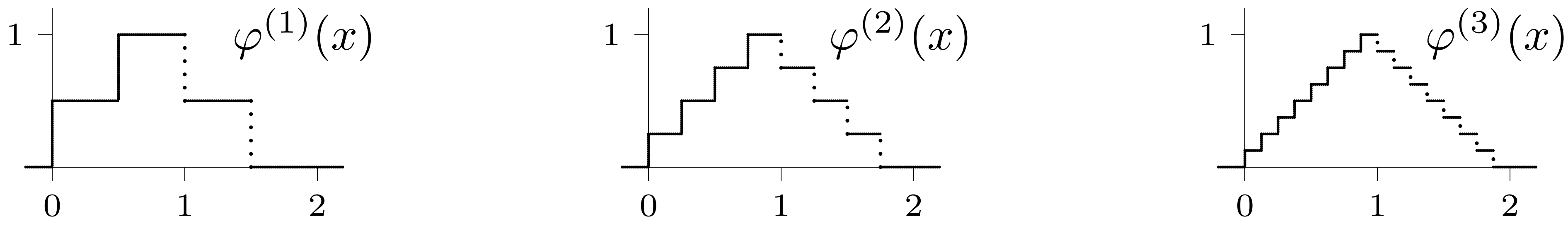
$\diamond$ 2 Filtar $h(0) = \frac{1}{2}$, $h(1) = \frac{1}{2}$, Četvrtka je fiksna tačka

$$\varphi^{(1)}(t) = \varphi^{(0)}(2t) + \varphi^{(0)}(2t-1) \equiv \varphi^{(0)}(t)$$

$\diamond$ 3 Filtar $h(0) = \frac{1}{4}$, $h(1) = \frac{1}{2}$, $h(2) = \frac{1}{4}$

Četvrtka daje dilatacionom jednačinom tri polu-četvrtke, $\cdots$

$$\varphi^{(1)}(t) = \frac{1}{2}\varphi^{(0)}(2t) + \varphi^{(0)}(2t-1) + \frac{1}{2}\varphi^{(0)}(2t-2).$$



Skaliranjem se skraćuju nosači, tako da je granični interval $0 \leq t < 2$.
$\varphi^{(i)}(t)$ teži krov funkciji kada $i \to \infty$

Analiza frekvencijskih odziva filtara $H(z)$, definisanih prethodnim primerima

$\diamond 1$ Iterativni algoritam ne konvergira.

$$H(z) = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} z^{-1}, \qquad H(-1) \neq 0, \quad \text{tj.} \quad \widehat{h}(\pi) \neq 0$$

$\diamond 2$ Iterativni algoritam konvergira. Četvrtka je ortogonalna na svoje translacije.

$$H(z) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} z^{-1}, \qquad H(-1) = 0, \quad \text{tj.} \quad \widehat{h}(\pi) = 0$$

Filtar $H(z)\, H(z^{-1})$ nema parnih stepena osim konstante.

$\diamond 3$ Iterativni algoritam konvergira. Krov funkcija nije ortogonalna u odnosu na translaciju.

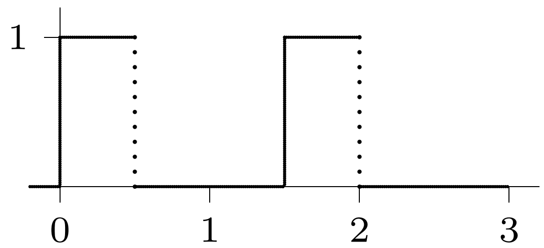
$$H(z) = \frac{1}{4}(1 + z^{-1})^2, \qquad H(-1) = H'(-1) = 0, \quad \text{tj.} \quad \widehat{h}(\pi) = \widehat{h}'(\pi) = 0$$

Filtar $H(z)\, H(z^{-1})$ sadrži parne stepene z^{-2} i z^{-4}.

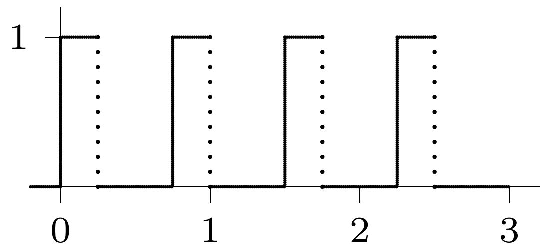
Zaključak

- Nula frekvencijskog odziva filtra u tački $z = -1$ $(\omega = \pi)$ je potreban, ali ne i dovoljan uslov za konvergenciju kaskadnog algoritma. Ova nula ne garantuje konvergenciju niza $\varphi^{(i)}(t)$, ali, bez te nule, konvergencija nije moguća.
- Ortogonalnost filtra ne garantuje ortogonalnost $\varphi(t)$ na njene translacije. Ali, bez svojstva funkcije $H(z)\,H(z^{-1})$ da ima samo neparne stepene po z^{-1}, osim konstante, ortogonalnost nije moguća.
- Konvergencija može biti *slaba* ili *jaka*. Pri slaboj konvergenciji, funkcije $\varphi^{(i)}(t)$ mogu oscilovati sve brže i brže, ali integral funkcije $\varphi^{(i)}(t)$ konvergira ka integralu funkcije $\varphi(t)$ na svakom konačnom intervalu $[0, T]$. Pri jakoj konvergenciji, koju pretpostavljamo, $\varphi^{(i)}(t)$ tezi ka $\varphi(t)$ u svakoj tački.

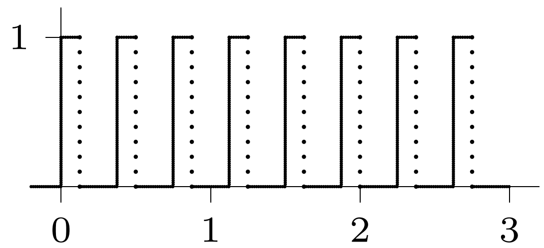
$\varphi^{(1)}(x)$



$\varphi^{(2)}(x)$



$\varphi^{(3)}(x)$



- Kao početna aproksimacija u kaskadnom algoritmu izabrana je četvrtka, zbog njene ortogonalnosti u odnosu na translaciju. Tada ortogonalna banka filtara održava ovu ortogonalnost. I drugi izbor početne funkcije će voditi ka istoj fiksnoj tački $\varphi(t)$, ili funkciji $c\varphi(t)$, $c =$ const, ako postoji jaka konvergencija.

$\mathcal{L}_2$ konvergencija kaskadnog algoritma svodi se na konvergenciju stepene iterativne metode definisane nizom vektora ($i = 0, 1, \ldots$)

$$\mathbf{a}^{(i)} = \{a^{(i)}(n)\}_n, \quad a^{(i)}(n) = \big(\varphi^{(i)}(x),\, \varphi^{(i)}(x+n)\big) = \int \varphi^{(i)}(x)\varphi^{(i)}(x+n)\, dx$$

ka sopstvenom vektoru $\mathbf{a} = \{a(n)\}$, $a(n) = \big(\varphi(x),\, \varphi(x+n)\big)$ matrice T,

$$\mathbf{a}^{(i+1)} = T\,\mathbf{a}^{(i)} \qquad \xrightarrow{i \to \infty} \qquad \mathbf{a} = T\,\mathbf{a}$$

Odgovarajuća sopstvena vrednost je $\lambda = 1$.

Ovoj sopstvenoj vrednosti matrice T odgovara levi sopstveni vektor

$$\mathbf{e}_0 = \begin{pmatrix} \dots & 1 & 1 & \dots & 1 & \dots \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{e}_0\, T = \mathbf{e}_0^\top\, M\, F^\top = \mathbf{e}_0\, F^\top = \mathbf{e}_0$$

♠ *Matrica* $T = (\downarrow 2) 2 F F^\top$ *uvek ima* $\lambda = 1$ *kao sopstvenu vrednost. Stepena iteracija*

$$\mathbf{a}^{(i)} = T\mathbf{a}^{(i-1)} = T^i \mathbf{a}^{(0)} \qquad \xrightarrow{i \to \infty} \qquad \mathbf{a} = T\mathbf{a}$$

ako i samo ako važi

uslov E $\qquad$ T *ima sve sopstvene vrednosti* $|\lambda| < 1,$ *osim jedne* $|\lambda| = 1$

♠ 6 *Pretpostavimo da funkcija skaliranja* $\varphi(x) \in \mathcal{L}_2$. *Kaskadni niz* $\varphi^{(i)}(x)$ *konvergira ka funkciji skaliranja* $\varphi(x)$ *u* $\mathcal{L}_2$ *normi,*

$$\lim_{i \to \infty} \|\varphi^{(i)} - \varphi\|^2 = 0,$$

ako i samo ako T *zadovoljava uslov E*.

Glatkost

♠ 7 *Funkcija skaliranja $\varphi(x)$ i talasić $\psi(x)$ imaju s izvoda u $\mathcal{L}_2$ ako sopstvene vrednosti matrice T, koje nisu jednake 2^{-k}, $k = 0, \dots, 2r-1$, zadovoljavaju uslove $|\lambda| < 4^{-s}$ (broj s, koji ne mora biti ceo broj, nije veći od parametra r).*

Zaključak

Sve zavisi od sopstvenih vrednosti matrice T

- Konvergencija kaskadnog algoritma zahteva da važe uslovi

$$\text{za sve } |\lambda| < 1, \quad \text{osim jedne } \lambda = 1$$

- Aproksimacija reda r zahteva sopstvene vrednosti

$$\lambda = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots, \left(\frac{1}{2}\right)^{2r-1}$$

- Glatkost izvoda do reda s u $\mathcal{L}_2$ zahteva da sve preostale sopstvene vrednosti zadovolje uslov $|\lambda| < 4^{-s}$.