Desanka Radunović
Matematički fakultet, Beograd

TALASIĆI ZA NEUPUĆENE

WAVELETS

Petnica, 13. maj 2005.

Furijeova analiza

Određeni zapis date veličine eksplicitno izražava neku informaciju o toj veličini, na štetu drugih informacija, koje su prikrivene. Da bi se jasnije istakla neka druga osobina potrebno je veličinu prikazati u drugom obliku, kako kažemo zapisati je drugom reprezentacijom. Prelaženje iz jednog oblika u drugi naziva se *transformacija*.

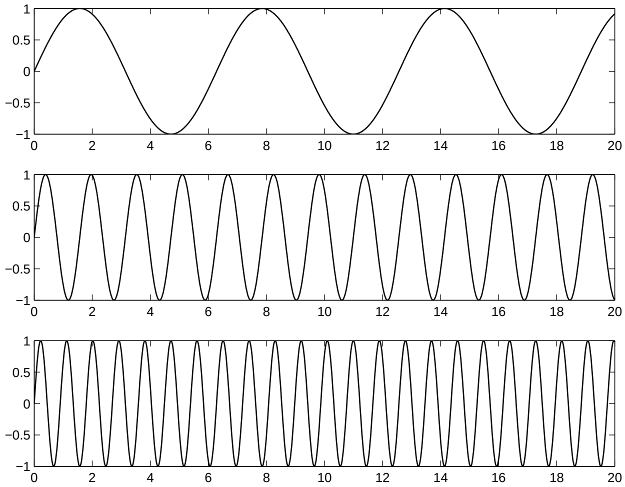
Jedna od vrlo važnih informacija u praktičnim problemima je brzina, tj. učestanost ili frekvencija, promene neke veličine. Na primer, različita je učestanost izlaženja dnevnih i nedeljnih novina. Informacija o brzini promene se jasnije iskazuje zapisom funkcije u frekvencijskom domenu, koji se dobija pomoću *Furijeove transformacije*.

Džozef Furije (Joseph Fourier) je 1807.g postavio tvrđenje da se svaka dovoljno glatka funkcija može predstaviti Furijeovim redom

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

gde se koeficijenti reda računaju izrazima

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx, \quad b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx$$



Ako po apsolutnoj vrednosti dominiraju koeficijenti uz sinusoide malih perioda, tj. velikih frekvencija (sinusoida na trećoj slici), onda je i sama funkcija vrlo promenljiva (oscilatorna). Ako dominiraju koeficijenti uz sinusoide velikih perioda, tj. malih frekvencija (sinusoida na prvoj slici), onda se i sama funkcija sporo menja (malo osciluje u odnosu na srednju vrednost). Srednja vrednost funkcije je izražena vrednošću koeficijenta $a_0/2$.

Stoga vrlo važne informacije o signalu (bilo kojoj fizičkoj veličini koja se menja u prostoru, vremenu ili po nekoj drugoj nezavisno promenljivoj) daje njegov *frekvencijski spektar*, koji je određen Furijeovim koeficijentima. On ukazuje, kao što smo upravo zaključili, na brzinu promene posmatrane veličine, a takođe, preko *Parsevalove jednakosti*, govori i o *energiji* signala f,

$$(\text{energija}_f)^2 = \|f\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx = \sum_{k=0}^{\infty}(|a_k|^2 + |b_k|^2)$$

Aplet 4.2 Fast Fourier transformation, koji se može naći na web adresi *web http://www.matf.bg.ac.yu/r3nm/NumericalMethods/index.html* ilustruje određivanje frekvencijskog spektra i Furijeovu analizu nekih funkcija.

Nedostaci Furijeove analize

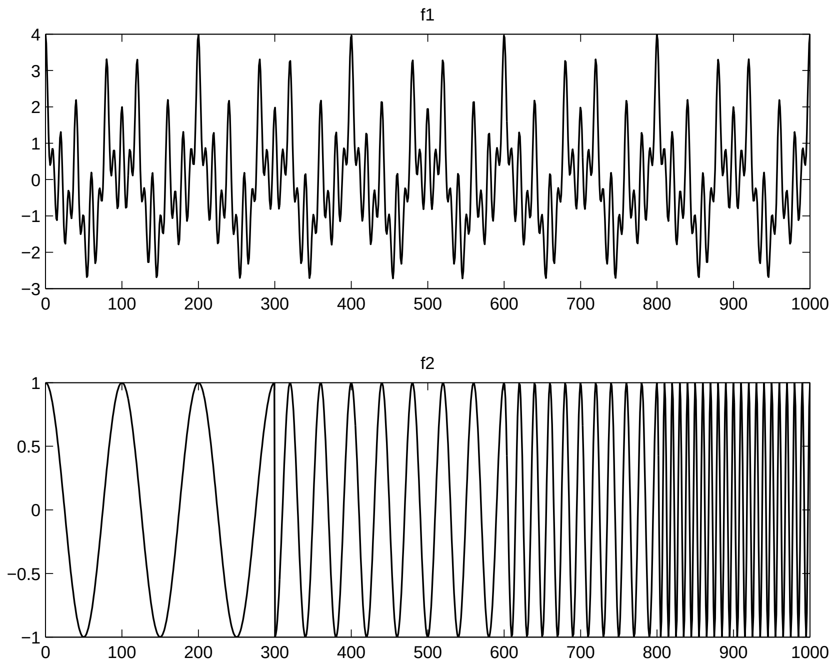
Zbog neograničenog trajanja sinusoide, Furijeova analiza nije pogodna za obradu nestacionarnih signala, a to su oni čiji se frekvencijski sadržaj menja sa vremenom.

Primer: Funkcije $f1(x)$ i $f2(x)$ su predstavljene sa iste četiri sinusne funkcije,

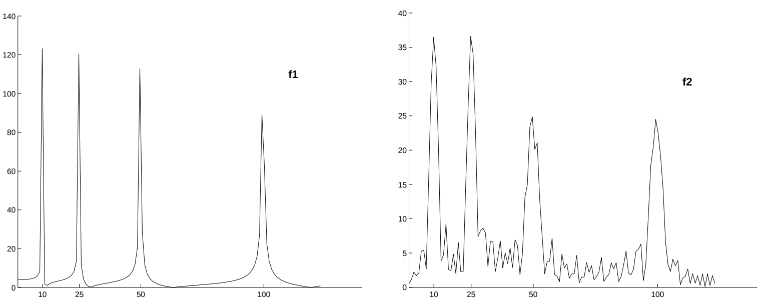
$$\begin{aligned} f1(x) &= \cos(2\pi * 10 * x) + \cos(2\pi * 25 * x) \\ &\quad + \cos(2\pi * 50 * x) + \cos(2\pi * 100 * x) \end{aligned}$$

$$f2(x) = \begin{cases} \cos(2\pi * 10 * x), & 0 < x < 300 \\ \cos(2\pi * 25 * x), & 300 < x < 600 \\ \cos(2\pi * 50 * x), & 600 < x < 800 \\ \cos(2\pi * 100 * x), & 800 < x < 1000 \end{cases}$$

Razlika je u tome što u funkciji $f1(x)$ sve četiri sinusoide traju sve vreme (za svako x u posmatranom intervalu), a u funkciji $f2$ kada se prva sinusoida zavrsi, počinje druga, pa se ona nastavlja trećom, i na kraju signal završava četvrtom sinusoidom. Dakle, frekvencijski sadržaj signala $f2$ se menja sa vremenom, te stoga kažemo da je signal nestacionaran. Grafici funkcija $f1$ i $f2$ po vremenu x su, očigledno, potpuno različiti.



Međutim, njihovi frekvencijski spektri su vrlo slični. Grafici prikazuju zavisnost funkcija od frekvencije. Izrazite su vrednosti koeficijenata koji odgovaraju pomenutim sinusoidama, s tim što se na grafiku funkcije $f2$ može uočiti šum koji je posledica spajanja različitih sinusoida.



Tako se došlo do ideje da se nestacionaran signal podeli na manje vremenske intervale, i analizira frekvencijski sadržaj svakog pojedinog dela. Jasno je da bi Furijeovom analizom delova funkcije $f2$ na intervalima dužine 100, dobili pravu informaciju o frekvencijskom sadržaju te funkcije u svakom od intervala. Metoda koja se zasniva na ovoj ideji naziva se *Kratkotrajna Furijeova transformacija* (STFT = Short Time Fourier Transformation).

Ako deljenje funkcije na intervale vršimo pomoću tzv. *prozorske funkcije*,

$$W(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0,1) \\ 0, & x \notin [0,1) \end{cases}$$

kratkotrajna Furijeova transformacija je jednaka

$$STFT_f(\omega, \tau) = \hat{f}(\omega), \quad x \in [\tau, \tau+1],$$

i određena je kao Furijeovua transformacija funkcije $f(x)\,W(x-\tau)$.

Svakako, mogli bismo definisati prozorsku funkciju i na drugi način, ali ostaje kao glavni nedostatak ovoga pristupa konstantna ”dužina prozora”. Bilo bi mnogo pogodnije kada bismo koristili ”uži prozor” u delu gde je signal jako promenljiv, a ”širi prozor” u delu gde se signal sporo menja.

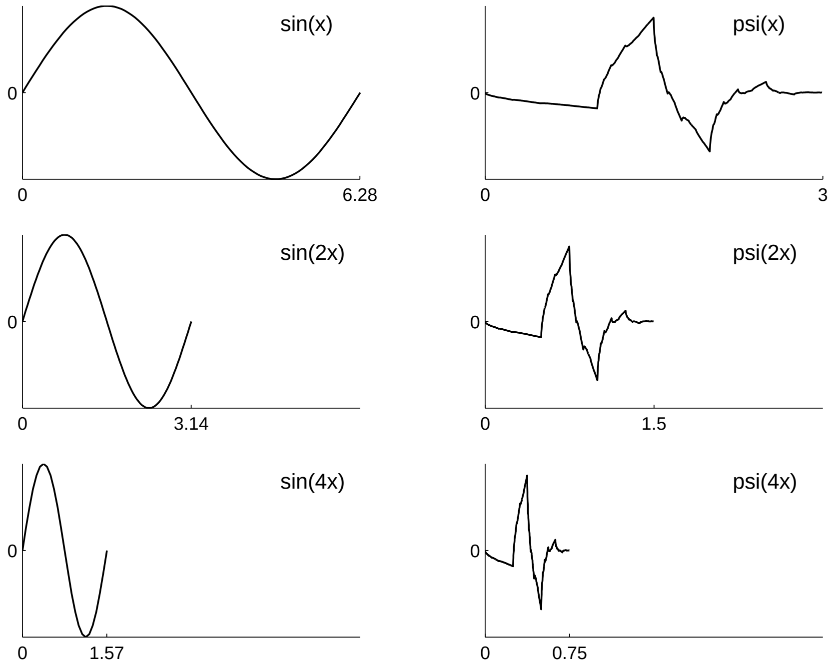
Transformacija talasićima

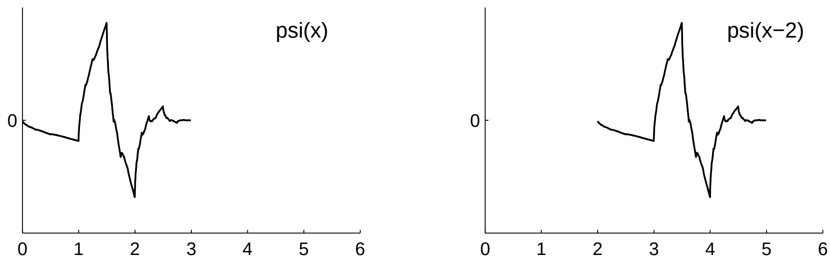
Transformacija talasićima (WT = Wavelet Transformation) upravo omogućava korišćenje ”prozora” promenljive dužine.

Kao što je sinusoida osnovna funkcija Furijeove transformacije, *talasić*

$$\psi_{a,b}(x) = \frac{1}{\sqrt{a}}\,\psi\big(\frac{x-b}{a}\big)$$

je osnovna funkcija transformacije talasićima. Kao i sinusoida, talasić je oscilatorna funkcija (ima srednju vrednost nula), ali je, za razliku od sinusoide, različita od nule samo na konačnom intervalu. Zbog oscilatorne prirode nazvana je je talasom, a zbog ograničenog trajanja malim talasom ili talasićem. Kao i sinusoida, promenom parametra a može se skupljati ili širiti (dilatacija), a promenom parametra b pomerati duž vremenske ose (translacija).





Jasno je da se izborom parametara a i b podešava širina i pozicija prozora. Širina prozora određuje frekvencijsku i vremensku rezoluciju. Što je vremenska rezolucija bolja, frekvencijska rezolucija je lošija, i obrnuto. To znači da ne možemo tačno reći koje frekvencije postoje u datom vremenskom trenutku (princip neodređenosti).

Ono što, takođe, treba uočiti jeste da je Furijeova analiza određena konkretnom funkcijom, sinusoidom, dok talasić nije jednoznačno određen – definisana su samo pravila koja treba da budu zadovoljena da bi talasić imao određena svojstva.

Diskretni talasići

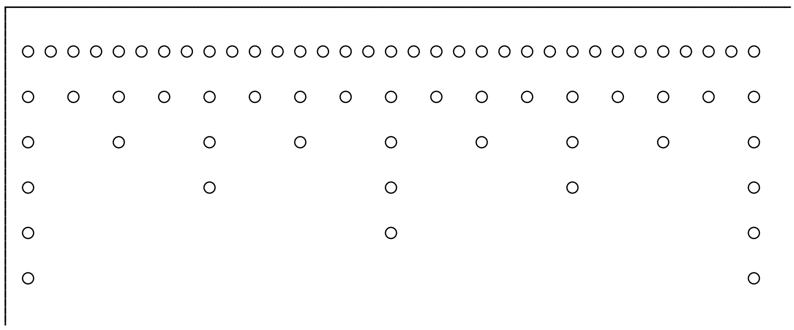
Parametri a i b se mogu kontinualno menjati, što nije korisno sa stanovišta primene. Može se pokazati da se i pomoću prebrojivo mnogo dilatacija i translacija jednoga talasića može rekonstruisati signal.

Tako dolazimo do pojma *diskretni talasići*. Oni su određeni izborom diskretnih vrednosti parametara a i b. Najčešće su te vrednosti stepeni broja 2, čime je definisana tzv. *diadska mreža* $a = 2^j$, $b = k\,2^j$. Svakoj tački ove mreže pridružen je talasić dobijen dilatacijom i translacijom osnovnog talasića ("majke"),

$$\psi_{jk}(x) = 2^{-j/2}\psi(2^{-j}x - k)$$

$$\psi_{jk}(x) \neq 0, \quad x \in [2^j k, 2^j(k+1)].$$

Diadska mreža parametara predstavljena u je u $(k, \log_2(a))$ koordinatnom sistemu, jer se k menja linearno, a a kao stepen broja 2.

log(a) 

Parametar a se na svakom novom nivou udvostručuje u odnosu na vrednost sa prethodnog nivoa, što znači da talasić postaje dvostruko širi. Broj tačaka u kojima se definišu talasići postaje dvostruko manji u odnosu na ovaj broj na prethodnom nivou, tj. rezolucija se smanjuje.

Na ovaj način ostvaruje se koncept *multirezolucije*. Za opisivanje brzo promenljivog dela signala koriste se uski, gusto raspoređeni talasići, a za opisivanje sporo promenljivog dela signala koriste se razvučeni, retko raspoređeni talasići,

$$f(x) = \sum_{j\in\mathcal{Z}} \sum_{k\in\mathcal{Z}} b_{j,k}\,\psi_{j,k}(x)$$

Teorijski, stepeni broja 2 mogu ići od $-\infty$ do ∞. U praksi, broj nivoa rezolucije je konačan, što se postiže uvođenjem u aproksimaciju *funkcije skaliranja* $\varphi(x)$.

$$f(x) \approx \sum_{k \in \mathcal{Z}} a_{J,k}\, \varphi_{j,k}(x) + \sum_{j=1}^{J} \sum_{k \in \mathcal{Z}} b_{j,k}\, \psi_{j,k}(x)$$

Opseg u kome će se kretati parametar k zavisi od vremenskog trajanja signala.

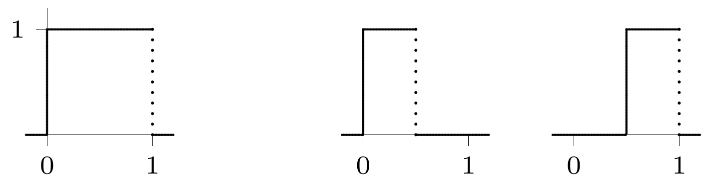
Funkcija skaliranja $\varphi(x)$ predstavlja osnov teorije talasića. Ona je rešenje *dilatacione jednačine*,

$$\varphi(x) = \sum_{k \in \mathcal{Z}} c(k) \sqrt{2} \varphi(2x - k).$$

Ovo je jedini tip jednačine čije rešenje je funkcija različita od nule na konačnom intervalu, ukoliko jednačina ima konačan broj sabiraka. Osobine rešenja u potpunosti zavise od koeficijenata $c(k)$ dilatacione jednačine.

Rešenje dilatacione jednačine koja ima samo dva koeficijenta različita od nule, $c(0) = c(1) = 1/\sqrt{2}$, je *četvrtka*

$$\varphi(x) \quad = \quad \varphi(2x) \quad + \quad \varphi(2x-1)$$

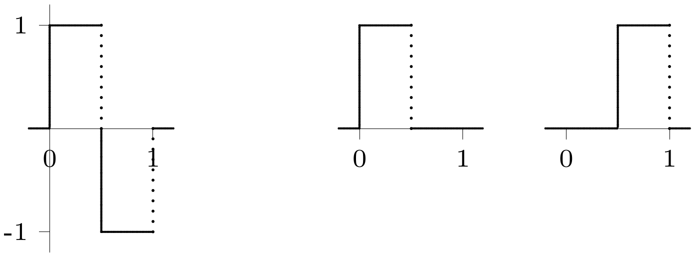


Linearnom kombinacijom dilatacija i translacija funkcije skaliranja, tzv. *jednačinom talasića*, definisan je talasić,

$$\psi(x) = \sum_{k \in \mathcal{Z}} d(k) \sqrt{2} \varphi(2x - k).$$

Četvrtkom, sa koeficijentima $d(0) = -d(1) = 1/\sqrt{2}$, je definisan *Harov talasić* (Haar, 1909),

$$\psi(x) \quad = \quad \varphi(2x) \quad - \quad \varphi(2x-1)$$



Korišćenjem ovih funkcija, signal se predstavlja stepenastom funkcijom, pri čemu su dužine konstantnih intervala različite – veće tamo gde se signal sporo menja, a manje u delovima gde se on brzo menja.

Piramidalni algoritam

Ako funkcije $\varphi(x)$ i $\psi(x)$ imaju određena svojstva, koeficijenti $a_{J,k}$ i $b_{j,k}$ u multirezolucijskoj reprezentaciji signala se mogu brzo izračunati pomoću *piramidalnog algoritma*

$$a_{j,k} = \sum_{l} c(l-2k)a_{j-1,l}, \quad b_{j,k} = \sum_{l} d(l-2k)a_{j-1,l},$$

a na osnovu ovih koeficijenata signal se takođe efikasno rekonstruiše korišćenjem *inverznog piramidalnog algoritma*

$$a_{j-1,l} = \sum_{k} \big(c(l-2k)a_{j,k} + d(l-2k)b_{j,k}\big).$$

Ova, tzv. *Brza transformacija talasićima* (FWT=Fast Wavelet Transformation) predstavlja efikasan algoritam savršene reprodukcije.

Ilustrujmo ga na primeru četvrtke (kojom se računaju aritmetičke sredine susednih vrednosti u signalu) i Harovog talasića (kojim se računaju razlike susednih vrednosti u signalu). Koeficijenti kojima se transformacija vrši su koeficijenti jednačine skaliranja i jednačine talasića,

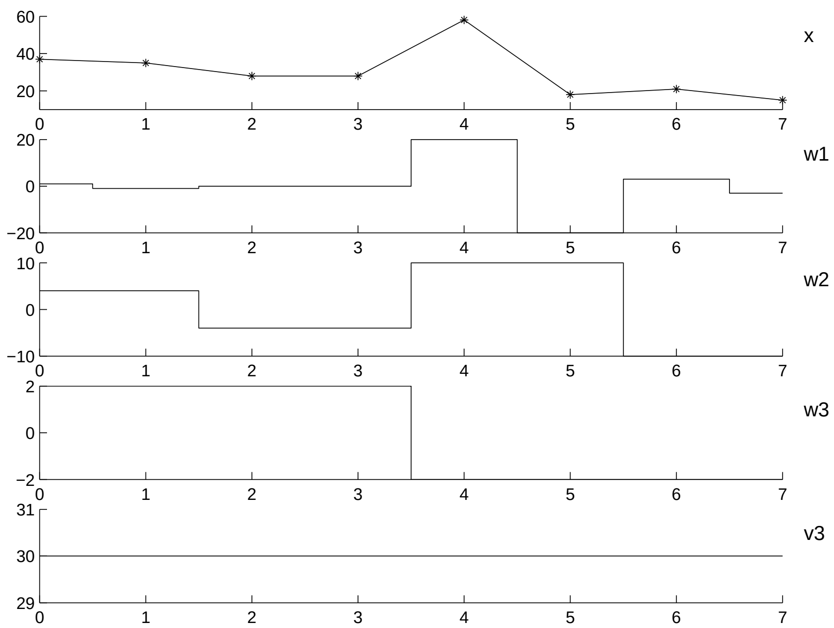
$$c(0) = c(1) = d(0) = -d(1) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Račun, u kome je izostavljeno deljenje svih brojeva sa $\sqrt{2}$, prikazan je sledećom šemom

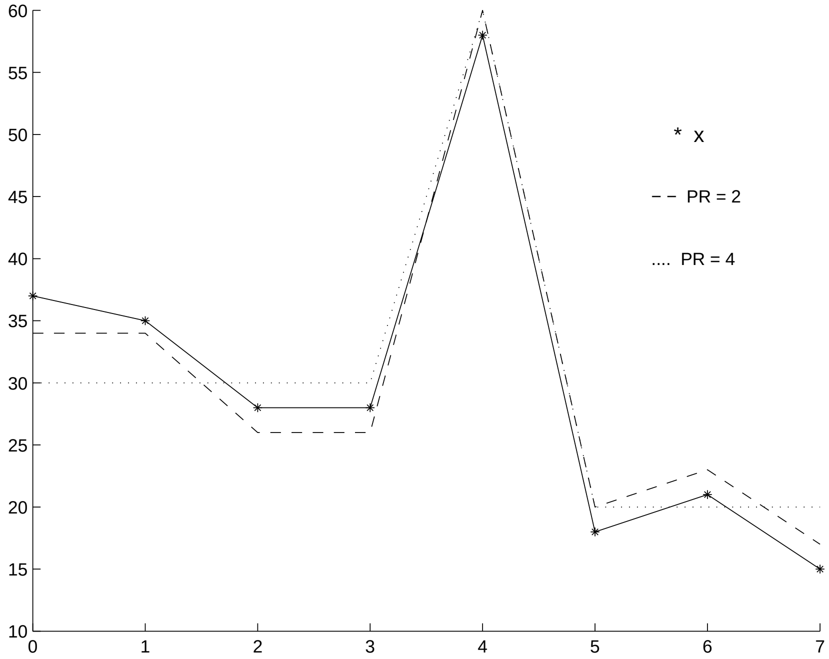
$$
\begin{array}{l}
\boxed{37\quad 35\quad 28\quad 28\quad 58\quad 18\quad 21\quad 15} \\
\qquad\qquad\swarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \searrow \\
\boxed{36\quad 28\quad 38\quad 18} \qquad\qquad 1\quad 0\quad 20\quad 3 \\
\qquad \swarrow \qquad \searrow \\
\boxed{32\quad 28} \qquad\quad 4\quad 10 \\
\swarrow \quad \searrow \\
\boxed{30} \qquad 2 \\
\hline
\boxed{30} \qquad 2 \qquad 4\quad 10 \qquad 1\quad 0\quad 20\quad 3
\end{array}
$$

Poslednja vrsta šeme sadrži jedan koeficijent funkcije skaliranja (uokviren), i sedam koeficijenata talasića: $2^0 = 1$ na poslednjem, trećem, nivou, $2^1 = 2$ na drugom, i $2^2 = 4$ na prvom nivou rezolucije.

Na crtežu koji sledi predstavljeni su: izlomljenom linijom grafik signala (X), detalji na sva tri nivoa (koeficijenti talasića W_1, W_2 i W_3), kao i osrednjenje na poslednjem, najgrubljem nivou rezolucije (koeficijent funkcije skaliranja V_3).



Na šemi izračunavanja se može uočiti da je jedan koeficijent talasića jednak nuli, a od prostalih šest neki se mogu zanemariti, tj. zameniti nulom, bez velikih posledica po izgled signala. Da je to tačno govori naredna slika, na kojoj je predstavljen polazni signal, kao i rekonstruisani signali dobijeni posle zanemarivanja koeficijenata većih od izabranog praga, u ovom slučaju 2, odnosno 4. Izbor praga zavisi od konkretnog problema i dozvoljene tolerancije, ali i od potrebe za kompresijom.



Naredne dve šeme prikazuju postupak sinteze, tj. rekonstrukcije kompresovanih signala na osnovu njihovih koeficijenata talasića i funkcije skaliranja. Pod uslovom da ne zanemarimo ni jedan koeficijent različit od nule, dobili bismo polazni signal, što predstavlja savršenu rekonstrukciju.

Šeme prikazuju rekonstrukciju kompresovanih signala, predstavljenih na gornjoj slici.

Kompresija: prag = 2

$$\boxed{30}\quad 2 \quad 4 \quad 10 \quad 1 \quad 0 \quad 20 \quad 3$$

$$\boxed{30}\quad 0 \quad 4 \quad 10 \quad 0 \quad 0 \quad 20 \quad 3$$

$$\boxed{30 \quad 30}\quad 4 \quad 10 \quad 0 \quad 0 \quad 20 \quad 3$$

$$\boxed{34 \quad 26 \quad 40 \quad 20}\quad 0 \quad 0 \quad 20 \quad 3$$

$$\boxed{34 \quad 34 \quad 26 \quad 26 \quad 60 \quad 20 \quad 23 \quad 17}$$

Kompresija: prag = 4

$$\boxed{30}\quad 2 \quad 4 \quad 10 \quad 1 \quad 0 \quad 20 \quad 3$$

$$\boxed{30}\quad 0 \quad 0 \quad 10 \quad 0 \quad 0 \quad 20 \quad 0$$

$$\boxed{30 \quad 30}\quad 0 \quad 10 \quad 0 \quad 0 \quad 20 \quad 0$$

$$\boxed{30 \quad 30 \quad 40 \quad 20}\quad 0 \quad 0 \quad 20 \quad 0$$

$$\boxed{30 \quad 30 \quad 30 \quad 30 \quad 60 \quad 20 \quad 20 \quad 20}$$

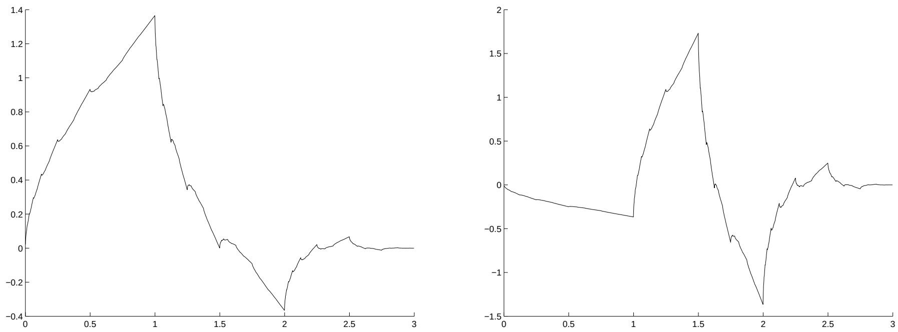
Kompresija pri pragu jednakom dva je omogućila da se signal zapisan sa osam brojeva sačuva sa pet podataka, a pri pragu jednakom četiri samo sa tri podatka. Dobar izbor talasića je onaj koji će produkovati male koeficijente (detalje), tako da se ovi mogu zanemariti bez velike promene signala posle sinteze. Smanjenje broja podataka omogućava efikasan prenos na daljinu, skladištenje i brzo pretraživanje baze signala.

Dobešis talasići DbN

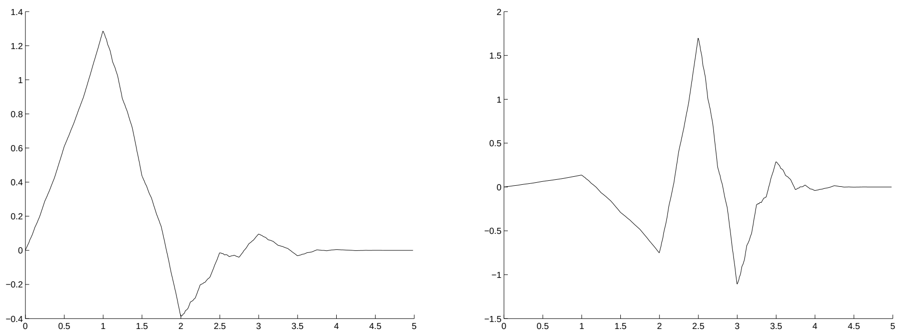
Za formulisanje pravila za konstrukciju talasića koji dopuštaju brzu transformaciju i imaju i druge poželjne osobine zaslužna je Ingrid Dobešis (Daubechies). Ona je 1988. godine objavila rad o novoj familiji talasića, koji su potom nazvani njenim imenom. Karakterišu se time da:

- nemaju eksplicitan izraz
- imaju kompaktan nosač $[0, 2\text{N-1}]$ (interval na kome su različiti od nule)
- ortogonalni su (može se primeniti piramidalni algoritam)
- tačno reprodukuju polinome stepena ne većeg od (N-1)
- glatkost im se povećava sa povećanjem N

Slike koje slede predstavljaju Dobešis funkciju skaliranja (levo) i talasić (desno) za $N = 2$ i $N = 4$.



Db2



Db4

Primene

1. Obrada signala (analiza, sinteza)
2. Komunikacije (kompresija)
3. Kompjuterska grafika (uzastopno renderisanje)
4. Kompjuterska vizija (multirezolucijski pristup)
5. Numeričke metode (multigrid tehnika)

Primer:

1. Kompresija otisaka prstiju u odnosu 20:1. Razliku između originalne i dekompresovane slike uočavaju samo eksperti. (JPEG 2000)
2. Lociranje i predviđanje zemljotresa.
3. Proučavanje udaljenih galaksija.
4. Analiza i kompresija medicinskih signala (ECG, EEG).
5. Kontrola kvaliteta analizom zvučnog signala.

Literatura:

1. Radunović D., *Numeričke metode*, Akademska misao, Beograd, 2004.

2. Radunović D., *Talasići (Wavelets)*, Akademska misao, Beograd, 2005.

www@matf.bg.ac.yu/~ dradun/