(1) Нека је

$$\begin{array}{ccc} F & \rightarrow & P \\ & & \pi \downarrow \\ & & B \end{array}$$

глатко раслојење и $f : B \to \mathbb{R}$ Морсова функција. Доказати да је $\pi^* f : P \to \mathbb{R}$ Морс–Ботова функција.

Дефиниција. Нека је M глатка многострукост димензије n. *Морсов полином* Морсове функције $f : M \to \mathbb{R}$ је

$$M_t(f) := \sum_{j=0}^{n} c_j(f) t^j,$$

где је c_j број критичних тачака индекса j. *Поенкареов полином* многострукости M је

$$P_t(M) := \sum_{j=0}^{n} \beta_j(M) t^j,$$

где су $\beta_j(M)$ Бетијеви бројеви.

Теорема 1. *Нека је M компактна многострукост и $f : M \to \mathbb{R}$ Морс–Ботова функција. Претпоставимо да је*

$$\mathrm{Crit}\,(f) = \bigsqcup_{j=1}^{k} C_j,$$

где су C_j дисјунктне повезане компоненте критичне подмногострукости. Нека су све многострукости C_j оријентабилне и нека је

$$MB_t(f) := \sum_{j=1}^{k} P_t(C_j) t^{\lambda_j},$$

где је λ_j Морс–Ботов индекс критичне подмногострукости C_j, а $P(C_j)$ њен Поенкареов полином. Тада постоји полином $R(t)$ са ненегативним целобројним коефицијентима такав да је

$$MB_t(f) = P_t(M) + (1+t)R(t).$$

Специјално, ако је f Морсова, онда је

$$M_t(f) = P_t(M) + (1+t)R(t)$$

за неки полином R са позитивним целобројним коефицијентима.

(2) Проверити Теорему 1 за следеће случајеве:
- (а) $M = \mathbb{T}^2$ је лежећи торус, f је функција висине.
- (б) $M = \mathbb{T}^2$ је усправни торус, f је функција висине.
- (в) $M = \mathbb{S}^n$ је сфера, f је функција висине.
- (г) $M = \mathbb{S}^n$ је сфера, f је квадрат функције висине.
- (д) M је произвољна многострукост, $f \equiv c$ је константна функција.

(3) Доказати да је, уз ознаке из Теореме 1,

$$\chi(M) = \sum_{j=1}^{k} (-1)^{\lambda_j} \chi(C_j),$$

где су λ_j Морсови индекси критичних многострукости C_j а χ Ојлерова карактеристика.

(4) (а) Нека је

$$\begin{array}{ccc} F & \rightarrow & P \\ & & \downarrow \\ & & B \end{array}$$

компактно глатко раслојење. Доказати да је $\chi(P) = \chi(F)\chi(B)$.

(б) Изразити Ојлерову карактеристику компактног глатког k–лисног наткривања преко Ојлерове карактеристике базе.

(5) Доказати да је за Морсову функцију $f : M \to \mathbb{R}$ Теорема 1 еквивалентна **Морсовим неједнакостима**:

$\sum_{j=0}^{k} (-1)^{j+n} c_j(f) \geq \sum_{j=0}^{k} (-1)^{j+n} \beta_j(M), \quad k = 0, 1, \ldots, n;$

$\sum_{j=0}^{n} (-1)^{j+n} c_j(f) = \sum_{j=0}^{n} (-1)^{j+n} \beta_j(M).$

(6) Нека је $f : M \to \mathbb{R}$ Морс–Ботова функција и нека су C_j као у Теореми 1. Нека је, за свако j, f_j Морсова функција на C_j и N_j цеваста околина многострукости C_j. Проширимо f_j на N_j дефинишући је тако да буде константна дуж влакана (тј. константна у правцу нормалном на C_j, уз идентификацију $N_j \cong \nu C_j$). Нека је, за свако j, ρ_j глатка функција једнака 1 у околини C_j и једнака 0 ван N_j. Дефинишимо функцију

$$g := f + \varepsilon \sum_{j=1}^{k} \rho_j f_j.$$

(а) Доказати да је, за довољно мало $\varepsilon > 0$, g Морсова функција на M.

(б) Доказати да је

$$\mathrm{Crit}\,(g) = \bigcup_{j=1}^{k} \mathrm{Crit}\,(f_j).$$

(в) Ако је $x \in C_j$ критична тачка функције f_j, доказати да је

$$m_x(g) = m_x(f_j) + \dim C_j,$$

где је $m_x(\cdot)$ Морсов индекс функције у њеној критичној тачки x.

(г) Доказати да у произвољној околини сваке Морс–Ботове функције постоји Морсова функција.

(7) Нека је (P, ω) затворена (тј. компактна без границе) симплектичка многострукост димензије $2n$.

(а) Доказати да Морсова функција $f : P \to \mathbb{R}$ има најмање n критичних тачака.

(б) Да ли је оцена броја критичних тачака Морсове функције у (а) строга?

(в) Да ли тврђење (а) важи за произвољну (не обавезно Морсову) глатку функцију $f : P \to \mathbb{R}$?