Глобална анализа 2010. **Други домаћи задатак**

(1) Доказати да су
  (а) сфера $\mathbb{S}^n := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|\mathbf{x}\| = 1\}$ и торус $\mathbb{T}^n := \mathbb{S}^1 \times \cdots \times \mathbb{S}^1$
  (б) пројективни простори $\mathbb{R}P^n$, $\mathbb{C}P^n$
  (в) скуп свих k–димензионих координатних система у $\mathbb{R}^n$

  глатке многострукости и одредити њихове димензије.

(2) Доказати да је скуп регуларних тачака глатког пресликавања $f : M \to N$ отворен у M.

(3) Да ли постоји функција која има густ скуп критичних вредности? (Одговор: да. Упоредити овај задатак са Сардовом теоремом.)

(4) Нека је $f : M \to N$ глатко пресликавање и нека је $y_0 \in N$. Ако је извод f_* константног ранга у некој околини скупа $f^{-1}(y_0)$, доказати да је $f^{-1}(y_0)$ или подмногострукост у M димензије $\dim M - \operatorname{rang} f_*$ или празан скуп.

(5) Доказати да је график глатког пресликавања $f : M \to N$ глатка подмногострукост у $M \times N$.

(6) Нека су $f : R \to M$ и $g : S \to M$ глатка пресликавања.
  (а) Доказати да је f трансверзално на g ако и само ако је

$$f \times g : R \times S \to M \times M, \quad (r, s) \mapsto (f(r), g(s))$$

  трансверзално на дијагоналу $\Delta := \{(x, x) \mid x \in M\}$.
  (б) Ако је f трансверзално на g, доказати да је

$$R \times_M S := \{(r, s) \in R \times S \mid f(r) = g(s)\}$$

  многострукост димензије $\dim R + \dim S - \dim M$.

(7) Нека су R и S подмногострукости многострукости M, такве да је и $R \cap S$ подмногострукост у M.
  (а) Да ли одатле следи да се R и S секу трансверзално?
  (б) Претпоставимо да је $\dim R \cap S = \dim R + \dim S - \dim M$. Да ли одатле следи да се R и S секу трансверзално?

(8) Нека је $f : M \to N$ имерзија, N повезана и $\dim M = \dim N$.
  (а) Доказати да је f отворено пресликавање.
  (б) Ако је многострукост M компактна, доказати да је f сурјекција.
  (в) Ако је многострукост M компактна, а пресликавање f инјективно, доказати да је f улагање.
  (г) Дати пример инјективне имерзије која није улагање.
  (д) Доказати да не постоји имерзија компактне многострукости M димензије n у $\mathbb{R}^n$. (Упоредити са Витнијевом теоремом о улагању.)

(9) Особина глатких пресликавања $f : M \to N$ назива се *стабилном* ако за свако $f : M \to N$ које има ту особину и за сваку глатку хомотопију $H : M \times [0, 1] \to N$, $H(\cdot, 0) = f$ постоји $\varepsilon > 0$ такво да $f_t := H(\cdot, t)$ има ту особину за $t < \varepsilon$. Ако је M компактна многострукост, доказати да су следећа својства стабилна:
  (а) својство „бити имерзија”
  (б) својство „бити субмерзија”;
  (в) својство „бити локални дифеоморфизам”;
  (г) трансверзалност на дату затворену подмногострукост $S \subset N$.

  Ако M није компактна, доказати да су наведена својства *локално стабилна* (дефинишући успут тај појам :-), а да не морају да буду стабилна.